

In den Statistischen Monatsheften Thüringen werden Aufsätze veröffentlicht, die sich überwiegend mit der Erfassung, Aufbereitung und Darstellung von statistischen Ergebnissen befassen. Neben diesen Themen werden aber auch wissenschaftliche Untersuchungen zu methodischen und mathematischen Problemen statistischer Zusammenhänge in den Statistischen Monatsheften veröffentlicht. Der nachstehende Aufsatz, der sich mit der Aussagekraft verkürzter Sterbetafeln für Thüringen beschäftigt, wurde im Rahmen des Praktikumseinsatzes eines Studenten der Friedrich-Schiller-Universität Jena im Thüringer Landesamt für Statistik erstellt.

Norbert Kuschel

Untersuchung über die Aussagekraft Verkürzter Sterbetafeln für die Territorialgliederungen in Thüringen

Die Sterblichkeitsverhältnisse innerhalb Thüringens weisen Unterschiede auf. So liegt die durchschnittliche Lebenserwartung in der kreisfreien Stadt Jena für die männliche Bevölkerung bei 71,7 Jahren und für die Frauen bei 77,9 Jahren. Zu den Kreisen mit den minimalen noch zu erwartenden Lebensjahren eines Neugeborenen ergeben sich Differenzen von 3,0 Jahren (Landkreis Sömmerda 68,7) und 2,0 Jahren (Landkreis Hildburghausen 75,9).

Diese relativ undifferenzierte Betrachtung der Mortalitätsverhältnisse legt das Interesse an einer weitergehenden Auswertung der Sterbedaten nahe. Dabei ist die Aussagekraft der Verkürzten Sterbetafeln für die territorialen Einheiten

- 5 kreisfreie Städte und 17 Landkreise
- 4 Planungsregionen
- Thüringen

von primärer Bedeutung.

Im weiteren sollen quantitative Aussagen über die Signifikanz der Sterbetafeln angegeben und eine qualitative Aus- und Bewertung vorgenommen werden. Das Ziel ist es festzustellen, welche Gebietsgröße notwendig ist, um statistisch gesicherte Erkenntnisse zur Mortalität in der Form „Verkürzter Sterbetafeln“ zu gewinnen.

Was sind Sterbetafeln?

Eine Sterbetafel ist das Protokoll der Lebensgeschichte eines (tatsächlichen oder hypothetisch konstruierten) Geburtsjahrganges (einer Kohorte) von Personen. Infolge der Sterblichkeit verliert die Kohorte in jedem Altersjahrgang einen gewissen Anteil ihrer Mitglieder, und es ist gerade das allmähliche Hinschmelzen des Ausgangsbestandes, das in der Sterbetafel registriert wird.

Es werden grundsätzlich zwei verschiedene Modelle unterschieden. Diese sind die Generations- und die Periodensterbetafel. Bei der Generationssterbetafel wird ein „geschlossener“ Geburtsjahrgang betrachtet, d.h., die Kohorte ist gegenüber der Migration abgeschlossen. Es wird ein Ausgangsbestand von $l_0=100\ 000$ Personen gewählt. Aufgrund der differierenden Sterblichkeiten beider Geschlechter wird die Betrachtung nach Geschlechtern getrennt durchgeführt.¹⁾

Die Anwendbarkeit der Methode der Generationssterbetafel erfährt eine große Einschränkung durch die Tatsache, daß eine vollständige Erstellung der Sterbetafel erst nach dem Versterben des letzten Mitglieds dieser Generation möglich ist. Neben der in der Praxis nicht durchführbaren Voraussetzung der Abgeschlossenheit der Kohorte unterliegen die Daten der Sterblichkeit auch einer großen historischen Zufälligkeit (Kriege, Seuchen, Verbesserung der Lebensverhältnisse etc.).

Deshalb kann die Generationssterbetafel kein regionales, historisches oder prognostisches Interesse befriedigen.

Der weitaus häufiger verwendete Typ der Sterbetafel ist die Perioden- oder Querschnittstafel. Die bekannteste Form ist die Allgemeine Sterbetafel. Hierfür ermittelt man die Sterbewahrscheinlichkeiten, indem die Verstorbenen eines

¹⁾ Vgl. Feichtinger, Gustav: Bevölkerungsstatistik, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1973, S. 63

Zeitintervalles (eine Woche, ein Monat, ein Jahr) nach Geschlechtern getrennt auf die Bevölkerung dieses Intervalles bezogen wird. Dabei wird im ersten Lebensjahr folgende Einteilung vorgenommen:

- 1.,..., 4. Woche
- 1.,..., 12. Monat

Ab dem ersten Lebensjahr wird die Bestimmung nur noch für Altersjahre geführt. Durch die „Anwendung“ der Sterbewahrscheinlichkeiten auf eine fiktive Kohorte von $l_0 = 100\ 000$ Personen ergibt sich die Absterbeordnung und die durchschnittliche Lebenserwartung für die weibliche und die männliche Bevölkerung.

Damit ist es ohne die verzerrende Störung durch die Altersstruktur der zu untersuchenden Bevölkerung möglich, die Sterblichkeitsverhältnisse unterschiedlicher Regionen (z.B. verschiedener Länder) und verschiedener Zeitabschnitte zu vergleichen.

Wird die Untersuchung für sehr kleine Gebiete oder aber auch für sehr kurze Zeiträume durchgeführt, ist es aufgrund der geringen Anzahl von Sterbefällen, gerade auch im ersten Lebensjahr, sinnvoll, sogenannte Verkürzte Sterbetafeln zu ermitteln. Dabei wird die Differenzierung für die ersten Lebenswochen und -monate nicht durchgeführt. Das Zeitintervall zwischen der Geburt und dem ersten Geburtstag wird wie die anderen Lebensjahre behandelt.

Die Sterbetafeln sind ein unerläßliches Mittel bei der Erstellung von Bevölkerungsprognosen, und sie dienen als eine Grundlage der Planung im Bereich der Lebens- und Sozialversicherungen. Ein sehr anschauliches Ergebnis der Sterbetafelberechnung ist die durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen, die im weiteren e_0 genannt wird.

Daten der Untersuchung

Im Zuge der Gebietsreform vom 1. Juli 1994 wurden in Thüringen 5 kreisfreie Städte und 17 Landkreise gebildet. Durch die Neuberechnung der durchschnittlichen Bevölkerungszahlen der Jahre 1990 bis 1993 für das männliche und weibliche Geschlecht ergeben sich für den größten Kreis, die kreisfreie Stadt Erfurt, eine mittlere Einwohnerzahl von 104 588 bzw. 116 092. Im kleinsten Kreis Thüringens, der kreisfreien Stadt Suhl, lebten in der Zeit von 1990 bis 1993 im Durchschnitt 27 346 Männer und 29 337 Frauen.

Ebenso wie die Bevölkerungszahlen wurden auch die Sterbefälle dieser Jahre für diese neue Gliederung der kreisfreien Städte und Landkreise berechnet.

Die geographische Vergrößerung der Kreise und die damit verbundene Erhöhung der Einwohnerzahlen kann die Erwartung wecken, daß die Sterblichkeitsdaten einer geringen zufälligen Verzerrung unterliegen. Der Bezug auf den Basiszeitraum der vier Jahre von 1990 bis 1993 verstärkt dies weiterhin. Jedoch ist es notwendig, genauere Methoden zu entwickeln, mit deren Hilfe eine statistisch gesicherte Aussage über die Signifikanz dieser Mortalitätsdaten getroffen werden kann.

Die im folgenden Abschnitt dargestellten Untersuchungsmethoden sind die Grundlage der im weiteren getroffenen Feststellung über die Aussagekraft von Verkürzten Sterbetafeln in Abhängigkeit von dem zu beurteilenden Gebiet (insbesondere von dessen Bevölkerungsgröße).

Statistische Methoden zur Bestimmung der Aussagekraft von Sterbetafeln

Die Grundlage für eine Berechnung von Sterbetafeln und somit auch von durchschnittlichen Lebenserwartungen bilden, wie schon im zweiten Abschnitt erwähnt, die Sterbewahrscheinlichkeiten. Um diese zu ermitteln, ist es notwendig, die mittleren Bevölkerungen und die Sterbefälle für die jeweiligen Altersklassen getrennt nach den Geschlechtern zu bestimmen.

Es werden die folgenden, allgemein üblichen Bezeichnungen eingeführt :

- l_x ... Anzahl der Personen, die das Alter x erreichen („Stichprobengröße“)
- d_x ... Anzahl der „im Laufe“ des Intervalls $[x, x+1)$ aufgetretenen Sterbefälle
- $q_x = d_x/l_x$... empirische Sterbewahrscheinlichkeit („Stichprobenanteil“)

Durch die Konstruktion der empirischen Sterbewahrscheinlichkeiten ist zu erkennen, daß es sich hierbei um das aus der Statistik bekannte Problem der Anteilschätzung handelt. ²⁾

Neben dem bekannten Testproblem (in der Literatur auch: Test zur Prüfung einer Wahrscheinlichkeit, Binomialtest) sind für die Untersuchungen der Aussagekraft von Sterbe-

2) Vgl. Bosch, Karl : Statistik-Taschenbuch, R. Oldenbourg Verlag, München 1993; S. 448-461

wahrscheinlichkeiten natürlich die Konfidenzintervalle (in der Literatur auch Vertrauensintervalle) von großem Interesse. ³⁾

Das Ziel soll es im weiteren sein, für die Grenzen dieser $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervalle, die ja als Sterbewahrscheinlichkeiten interpretiert werden können, ebenfalls Sterbetafeln und insbesondere die durchschnittliche Lebenserwartung (als ein sehr anschauliches Ergebnis der Sterbetafel) zu berechnen.

Die allgemein übliche Formel für die Vertrauensintervalle einer Anteilsschätzung fordert jedoch die Gültigkeit gewisser Voraussetzungen an die „Stichprobe“. Es muß die Bedingung erfüllt sein, daß das Produkt von der „Stichprobengröße“ und der zu „prüfenden Wahrscheinlichkeit“ größer oder gleich 4 ist. Dies bedeutet aufgrund der o.g. Definition der empirischen Sterbewahrscheinlichkeit, daß in einem Jahrgang im zu untersuchenden Gebiet die Anzahl der Sterbefälle 4 nicht unterschreitet. Dies bedeutet

$$d_x \geq 4 \quad (x = 0, 1, \dots)$$

Durch die Umformung der bekannten Formel für das $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall ergeben sich für das Problem der Sterbewahrscheinlichkeiten (in Abhängigkeit der empirisch ermittelten Daten der durchschnittlichen Bevölkerung (l_x) und der Todesfälle (d_x) folgende Grenzen eines 0,95-Vertrauensintervalls: ⁴⁾

$$q_x^u = \frac{2d_x + 1,96^2 - 1,96 \sqrt{4d_x \left(1 - \frac{d_x}{l_x}\right) + 1,96^2}}{2(l_x + 1,96^2)}$$

$$q_x^o = \frac{2d_x + 1,96^2 + 1,96 \sqrt{4d_x \left(1 - \frac{d_x}{l_x}\right) + 1,96^2}}{2(l_x + 1,96^2)}$$

wobei q_x^u die „untere Sterbewahrscheinlichkeit“ und q_x^o die „obere Sterbewahrscheinlichkeit“ der Personen im Alter von x Jahren genannt werden soll.

Neben dem eingeführten Kalkül der Konfidenzintervalle ist es, wie sich bei den Untersuchungen zeigte, sinnvoll, eine Methode zu finden, mit der die Äquivalenz einer beobachteten Anteilsrate zu einer vorgegebenen Referenzwahrscheinlichkeit überprüft werden kann.

Diese Notwendigkeit ergab sich aus den Berechnungen der durchschnittlichen Lebenserwartungen und der dabei festgestellten relativ geringen Abweichung für die Planungs-

regionen. Deshalb muß ein mathematisch-statistisches Mittel gefunden werden, mit dessen Hilfe es möglich ist, festzustellen, ob es sich um statistisch signifikante oder zufällige Differenzen handelt.

Eine solche beschriebene Methodik kann durch die Berechnung des Fehlers 2. Art erfolgen. Jedoch ist durch die Konstruktion des Tests zur Prüfung einer Wahrscheinlichkeit dieser Fehler groß, wenn der Fehler 1. Art (Wahrscheinlichkeit: α) klein wird. Deshalb ist es notwendig, einen weiteren statistischen Test, den *Test auf Äquivalenz eines Binomialparameters mit vorgegebenem Referenzwert*, zur Beurteilung der Aussagekraft von Sterbetafeln zu nutzen. ⁵⁾

3) Das wahrscheinlich bekannteste statistische Entscheidungsproblem ist die Punktschätzung. Von großem Interesse ist jedoch oft, die Güte einer Schätzung (hier der Sterbewahrscheinlichkeit) zu quantifizieren. Das Schätzergebnis ist in diesem Fall ein Intervall, dessen Grenzen die Realisierung von Stichprobenfunktionen sind. Solche Intervalle werden Konfidenzintervalle oder Vertrauensintervalle genannt. Die Angaben eines solchen Vertrauensintervalls führt zu der (fordernden) Aussage:

Der gesuchte Parameter ist im Intervall enthalten.

Mit der Einführung der Irrtumswahrscheinlichkeit α wird das Ziel verbunden, Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ zu ermitteln. Die folgende heuristische Vorstellung veranschaulicht dies:

Falls viele Konfidenzintervalle zum Niveau $1-\alpha$ berechnet werden, so ergibt sich nach dem Gesetz der Großen Zahlen, daß „auf Dauer“ in 100 $(1-\alpha)$ Prozent aller Fälle der unbekannte Parameter im Intervall enthalten ist.

4) Konfidenzintervall zum Niveau: $1 - 0,05 = 0,95$

Das bekannte $(1-\alpha/2)$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist für $\alpha/2 = 0,05$ gegeben durch $z_{1-\alpha/2} = 1,96$

5) Die statistische Beurteilung einer beobachteten Anteilsrate (z.B. rohe Sterbewahrscheinlichkeit) erfolgt meistens durch den allgemein bekannten Binomialtest (Anteilsschätzung), wobei die Nullhypothese eine Übereinstimmung zwischen einer vorgegebenen und einer beobachteten Wahrscheinlichkeit (p_0 bzw. p) sowie die Alternativhypothese die Unterschiedlichkeit von p_0 und p aussagt.

Bei einer wissenschaftlich exakten Handhabung der Methoden der mathematisch-statistischen Theorie der Hypothesentests ist es aber prinzipiell unzulässig, den herkömmlichen Binomialtest einfach umzukehren und im Fall der Abwesenheit eines signifikanten Unterschieds auf die Äquivalenz der zu vergleichenden Anteilswahrscheinlichkeiten zu schließen.

Deshalb soll im folgenden der *Test auf Äquivalenz eines Binomialwertes mit vorgegebenen Referenzwert* kurz beschrieben und am Beispiel der Sterbewahrscheinlichkeiten erläutert werden.

Jede von n unabhängigen Beobachtungen kann nur die Werte 0 (Überleben des Angehörigen der Altersklasse x) und 1 (Tod im betrachteten Zeitintervall) annehmen. Die zu untersuchende Rate (rohe Sterbewahrscheinlichkeit) in der Grundgesamtheit wird wie üblich mit p bezeichnet. Die Verteilung der Summe der Beobachtungen ist bekanntlich binomialverteilt mit den Parametern n und p .

Für das Äquivalenzproblem werden folgende Hypothesen eines *gleichmäßig besten α -Niveau-Test* formuliert

$$H_0 : 0 < p < p_0 (1-\epsilon) \vee p_0 (1+\epsilon) < p < 1$$

$$H_1 : p_0 (1-\epsilon) < p < p_0 (1+\epsilon)$$

Dabei ist p_0 die bekannte Referenzwahrscheinlichkeit und ϵ ein beliebiger Toleranzparameter. Zur Bestimmung der kritischen Grenzen (C_1 und C_2) dient ein relativ einfaches numerisches Verfahren zur Lösung eines Gleichungssystems, das durch die geforderten Optimalitätsbedingungen bei der Aufstellung randomisierter Entscheidungen für H_1 entsteht. Dieser Suchalgorithmus wird vom Autor implementiert und diente bei der Bestimmung der kritischen Grenzen zur Untersuchung der Äquivalenz der Sterbewahrscheinlichkeiten.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls die Bedingung $C_1 \leq np \leq C_2$ erfüllt ist. Der Fehler, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie richtig ist, hat einen Wert der kleiner oder gleich α ist. Oder anschaulicher formuliert:

Mit der Wahrscheinlichkeit α lehnt man die Nichtäquivalenz ab, obwohl die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p tatsächlich nicht äquivalent sind.

(vgl. Wellek, Stefan: *Statistische Methoden zum Nachweis von Äquivalenz*, Gustav Fischer Verlag, Stuttgart, Jena 1994)

Anhand dieses Tests soll ermittelt werden, ob für die Sterbewahrscheinlichkeit im Altersintervall x (z.B. für eine Planungsregion) mit einer Wahrscheinlichkeit α eine tatsächlich vorhandene Nichtäquivalenz zu einem vorgegebenen Referenzwert (z.B. Sterbewahrscheinlichkeit der Altersklasse x eines Geschlechts in Thüringen) nicht abgelehnt wird.

Die Aussagekraft von Sterbetafeln für die kreisfreien Städte und Landkreise

Die kreisfreien Städte und Landkreise, als kleinste sinnvolle territoriale Untersuchungseinheiten, sollen nun mittels der o.g. Methode der Konfidenzintervalle auf die Signifikanz von Verkürzten Sterbetafeln überprüft werden.

Die Tabelle 1 zeigt für einige ausgewählte Kreise Thüringens die durchschnittlichen Lebenserwartungen, die für die rohen (empirischen) Sterbewahrscheinlichkeiten sowie die obere und untere Konfidenzintervallsgrenze berechnet wurden. Die Größe der Bevölkerung spielt dabei die zentrale Rolle, d.h. es wurde ein „repräsentativer“ Querschnitt der verschiedenen Kreisgrößen gewählt.

Tabelle 1: Durchschnittliche Lebenserwartungen 1990/93 ausgewählter Kreise in Thüringen

Durchschnittliche Bevölkerungen; Durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen, berechnet aus den oberen und unteren Grenzen der Konfidenzintervalle (Obere und Untere Sterbewahrscheinlichkeit); Durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen, berechnet aus den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten (Rohe Sterbewahrscheinlichkeit).

Kreisfreie Städte Landkreise	Mittlere Bevölkerung	Obere Sterbewahrscheinlichkeit	Untere Sterbewahrscheinlichkeit	Rohe Sterbewahrscheinlichkeit
<i>Männer</i>				
Erfurt	104 588	65,30	73,14	69,81
Jena	49 549	64,72	76,39	71,86
Suhl	27 346	60,78	76,55	70,75
Eichsfeld	56 850	65,24	75,47	71,43
Wartburgkreis	96 762	65,49	73,96	70,04
Gotha	72 411	63,65	72,98	69,18
Sömmerda	40 594	61,39	73,87	69,09
Greiz	67 735	63,24	73,71	69,59
<i>Frauen</i>				
Erfurt	116 092	72,03	79,08	76,38
Jena	54 886	71,04	81,40	78,02
Suhl	29 337	67,36	82,20	77,82
Eichsfeld	60 335	71,48	80,93	77,73
Wartburgkreis	102 822	71,55	79,11	76,27
Gotha	78 922	70,69	79,23	76,20
Sömmerda	43 068	68,22	80,18	76,29
Greiz	68 682	70,42	80,13	76,87

Für den kleinsten Kreis in Thüringen, die kreisfreie Stadt Suhl, ergeben sich für die Lebenserwartung eines Neugeborenen Differenzen bei der Berechnung mittels der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten und den Konfidenzintervallsgrenzen für Männer und Frauen von 10,0 Jahren (-14,0 Prozent) bzw. 10,5 Jahren (-13,4 Prozent) nach unten und 5,8 Jahren (+10,8 Prozent) bzw. 4,4 Jahren (+5,6 Prozent) nach oben. Dieses Ergebnis wird auch für Kreise mit ähnlicher Größe, wie der kreisfreien Stadt Weimar (nach unten 9,7 bzw. 10,0 Jahre, nach oben 5,7 bzw. 4,5 Jahre) oder dem Landkreis Sonneberg (nach unten 8,6 bzw. 8,8 Jahre, nach oben 4,9 bzw. 3,6 Jahre) beobachtet.

In den Kreisen, deren Bevölkerungsgröße sich im Mittelfeld befindet, wurden Differenzen ermittelt, die nur gering unter denen der kleinen Kreise liegen. In der kreisfreien Stadt Jena betragen die Abweichungen der Lebenserwartung berechnet durch die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten und die obere Vertrauensintervallsgrenze 7,1 Jahre (-9,9 Prozent) für die männliche Bevölkerung und 7,0 Jahre (-8,9 Prozent) für Frauen. Die Unterschiede zur unteren Intervallsgrenze sind 4,5 Jahre (+6,3 Prozent) und 3,4 Jahre (+4,3 Prozent).

Diesen Abständen gleichende Ergebnisse werden auch für Kreise ähnlicher Größe, wie zum Beispiel der kreisfreien Stadt Gera und den Landkreisen Eichsfeld, Nordhausen oder Saale-Holzland-Kreis, beobachtet.

Die größten Kreise Thüringens weisen für die nach der o.g. Methode berechneten Lebenserwartungen erhebliche Differenzen auf. In der kreisfreien Stadt Erfurt betragen diese für Männer 4,5 Jahre (-6,5 Prozent) nach unten und 3,3 Jahre (+4,8 Prozent) nach oben bzw. für die weibliche Bevölkerung 4,4 Jahre (-5,7 Prozent) und 2,7 Jahre (+3,5 Prozent). Für den Wartburgkreis wurden fast die gleichen Unterschiede berechnet.

In Auswertung der quantitativen Erkenntnisse über die Signifikanz der Sterbewahrscheinlichkeiten für eine kreisfreie Stadt oder einen Landkreis muß festgestellt werden, daß sich sämtliche Konfidenzintervalle der einzelnen Jahrgänge aller Kreise überlappen. Dies bedeutet insbesondere, daß eine statistisch gesicherte signifikante Abweichung der Sterbewahrscheinlichkeiten und der daraus abgeleiteten Sterbetafeln bzw. durchschnittlichen Lebenserwartungen nicht zu beweisen ist.

Darüber hinaus sind, wie oben festgestellt, die Differenzen zwischen den durchschnittlichen Lebenserwartungen, die aus den oberen und unteren Konfidenzintervallgrenzen berechnet wurden, so groß, daß eine weitere Untersuchung für die Sterbewahrscheinlichkeiten in den einzelnen Kreisen, wie etwa mit dem Test auf die Äquivalenz eines Binomialparameters mit einem vorgegebenen Referenzwert, nicht sinnvoll ist.

Von einer Berechnung und Veröffentlichung der Sterbetafeln für eine kreisfreie Stadt oder einen Landkreis in Thüringen ist unter Beachtung einer exakten Handhabung mathematisch-statistischer Mittel, insbesondere aus dem Gebiet der Testtheorie, abzuraten. Aus den vorliegenden Daten sind wegen der zu kleinen Grundgesamtheiten (1.) keine signifikanten Unterschiede statistisch nachzuweisen.

Verkürzte Sterbetafeln für die Planungsregionen ?

Neben der territorialen Gliederung Thüringens in Kreise existiert die Zusammenfassung von kreisfreien Städten und Landkreisen in die vier Planungsregionen Nord-, Mittel-, Süd- und Ostthüringen. Die durchschnittlichen Einwohnerzahlen liegen zwischen 216 253 bzw. 231 889 für Männer und Frauen in Nordthüringen und 397 904 bzw. 435 713 in der Region Ostthüringen. Die Vergrößerung der „Stichprobengröße“ (Bevölkerung) führt zu der Vermutung, daß die Aussagekraft von Sterbewahrscheinlichkeiten und damit auch von Sterbetafeln der Planungsregionen deutlich über der für die Kreise liegt.

Zunächst wurde wie bei den kreisfreien Städten und Landkreisen eine quantitative Bewertung mit den Konfidenzintervallen und den hieraus gewonnenen Grenzwahrscheinlichkeiten durchgeführt. Die Differenzen zwischen den durchschnittlichen Lebenserwartungen eines Neugeborenen, die aus den oberen bzw. unteren Vertrauensintervallsgrenzen und den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet wurden, betragen für die männliche Bevölkerung

- in Nordthüringen -4,0 Prozent und +3,2 Prozent,
- in Mittelthüringen -3,2 Prozent und +2,7 Prozent,
- in Südthüringen -3,6 Prozent und +2,9 Prozent sowie
- in Ostthüringen -3,0 Prozent und +2,5 Prozent

und für die Frauen

- in Nordthüringen -3,5 Prozent und +2,4 Prozent,
- in Mittelthüringen -2,8 Prozent und +2,1 Prozent,

in Südthüringen -3,2 Prozent und +2,3 Prozent sowie in Ostthüringen -2,5 Prozent und +1,9 Prozent.

Wie bei den Untersuchungen der durchschnittlichen Lebenserwartungen für die Kreise ist auch bei den Planungsregionen eine Überlappung sämtlicher Konfidenzintervalle der Sterbewahrscheinlichkeiten aller einzelnen Jahrgänge eines Geschlechts zu beobachten. Die Tabelle 2 zeigt, daß die oben angegebenen Differenzen zwischen den durchschnittlichen Lebenserwartungen, die aus den oberen und unteren Konfidenzintervallgrenzen der Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet werden, wesentlich kleiner als bei den Kreisen sind.

Tabelle 2: Durchschnittliche Lebenserwartungen 1990/93 der Planungsregionen in Thüringen

Durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen, berechnet aus den oberen und unteren Grenzen der Konfidenzintervalle (Obere und Untere Sterbewahrscheinlichkeit); Durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen, berechnet aus den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten.

Planungsregion	Obere Sterbewahrscheinlichkeit	Untere Sterbewahrscheinlichkeit	Rohe Sterbewahrscheinlichkeit
<i>Männer</i>			
Nordthüringen	67,52	72,64	70,38
Mittelthüringen	67,33	71,50	69,60
Südthüringen	67,22	71,78	69,74
Ostthüringen	68,22	72,07	70,32
<i>Frauen</i>			
Nordthüringen	74,20	78,75	76,89
Mittelthüringen	74,39	78,09	76,50
Südthüringen	74,01	78,16	76,43
Ostthüringe	75,13	78,58	77,09

Dies wirft natürlich die folgenden Fragen auf:

Besteht eine Äquivalenz zwischen den Sterbewahrscheinlichkeiten der Planungsregionen und dem Land Thüringen?

Ist es möglich, im Falle der Äquivalenz eine Quantifizierung des Fehlers vorzunehmen, wenn eine Nichtäquivalenz nicht abgelehnt wird?

Mit der Durchführung der Tests auf Äquivalenz eines Binomialparameters (Sterbewahrscheinlichkeit der Planungsregionen) mit vorgegebenem Referenzwert (Sterbewahrscheinlichkeit in Thüringen) wurde eine mathematisch-statistisch exakte Beantwortung dieser Fragen möglich.

Die Tabelle 3 veranschaulicht, daß in allen Planungsregionen Thüringens in nur sehr wenigen Altersklassen die Nullhypothese der Nichtäquivalenz

$$(H_0: 0 < p < 0,9p_0 \vee 1,1p_0 < p < 1)$$

angenommen wird. Bei fast allen Altersklassen der beiden Geschlechter wird die Nullhypothese gegen die Alternativhypothese

$$(H_1: 0,9p_0 < p < 1,1p_0)$$

abgelehnt.

Aufgrund der Konstruktion der Äquivalenzteste ist die Wahrscheinlichkeit, die Nichtäquivalenz abzulehnen, obwohl sie richtig ist, kleiner oder höchstens gleich 0,25 (also 25 Prozent).

Tabelle 3: Durchschnittliche Lebenserwartung 1990/93 für die vier Planungsregionen in Thüringen

Durchschnittliche Bevölkerungen, Durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen, berechnet aus den rohen und geglätteten Sterbewahrscheinlichkeiten; Anzahl und Auflistung der Altersklassen, in denen eine Nichtäquivalenz zu den Wahrscheinlichkeiten Thüringens nicht abgelehnt werden kann.

Planungsregion Land	Mittlere Bevölkerung	Lebenserwartung aus den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten	Lebenserwartung aus den geglätteten Sterbewahrscheinlichkeiten ¹⁾	Anzahl der nichtäquivalenten Altersklassen ²⁾	Auflistung der nichtäquivalenten Altersklassen ²⁾
<i>Männer</i>					
Nordthüringen ³⁾	216 253	70,38	70,18	0	-
Mittelthüringen ⁴⁾	350 122	69,60	69,37	5	67.,78.,80.,81.,82.
Südthüringen ⁵⁾	267 975	69,74	69,47	2	0., 26.
Ostthüringen ⁶⁾	397 904	70,32	70,05	2	21., 29.
Thüringen	1 232 253	69,99	69,75	-	-
<i>Frauen</i>					
Nordthüringen ³⁾	231 889	76,89	76,68	2	0., 57.
Mittelthüringen ⁴⁾	383 545	76,50	76,31	6	66.,67.,76.,77.,78.,79.
Südthüringen ⁵⁾	287 707	76,43	76,20	2	0., 41.
Ostthüringen ⁶⁾	435 713	77,09	76,89	2	66., 67.
Thüringen	1 338 854	76,75	76,54	-	-

1) Die Glättung wurde mittels Spline-Approximation (Vgl. Späthe, Helmut : Eindimensionale Spline-Interpolationsalgorithmen, R. Oldenburgverlag, München, Wien 1990, S. 61-78) für die Jahrgänge 1 bis 90 mit den Glättungsparametern der Größe $\delta = 0,4$ durchgeführt, wodurch größere Verzerrungen im Kindes- und Jugendalter ausgeglichen werden, ohne die tatsächlichen Sterblichkeitverhältnisse zu verzerren. Ab dem 91. Lebensjahr wird eine lineare Anpassung nach der MKQ-Methode vorgenommen. Dies hat für die Jahrgänge mit der durchschnittlichen Bevölkerung 0 (keine Überlebenden in diesem Jahrgang) den großen Vorteil, daß trotzdem eine Sterbewahrscheinlichkeit angegeben werden kann.

2) Die Angabe der Anzahl und der Auflistung von Altersstufen mit der Eigenschaft „nichtäquivalente Sterbewahrscheinlichkeiten“ zu besitzen bezieht sich auf die Durchführung eines Äquivalenztests für alle Sterbewahrscheinlichkeiten der Jahrgänge 0 bis 100. Dabei wurde der Test auf Äquivalenz eines Binomialwertes mit dem Niveau von $\alpha = 0,25$ und einer ϵ -Abweichung von 0,1, d.h 10 Prozent, auf die splinegeglätteten Sterbewahrscheinlichkeiten der vier Planungsregionen für das weibliche und männliche Geschlecht angewandt. Als Referenzwahrscheinlichkeiten dienen die geglätteten Werte für Thüringen.

3) Eichsfeld, Unstrut-Hainich-Kreis, Nordhausen, Kyffhäuserkreis

4) Stadt Erfurt, Stadt Weimar, Sömmerda, Gotha, Ilmkreis, Weimar-Land

5) Stadt Suhl, Wartburgkreis, Schmalkalden-Meiningen, Sonneberg, Hildburghausen

6) Stadt Jena, Stadt Gera, Saale-Holzland-Kreis, Saale-Orla-Kreis, Saalfeld-Rudolstadt, Greiz, Altenburger Land

Als Resümee dieser quantitativen Erkenntnisse über die Signifikanz der Sterbewahrscheinlichkeiten für die Planungsregionen in Thüringen wurde festgestellt, daß eine Berechnung von Verkürzten Sterbetafeln für diese territorialen Einheiten nicht sinnvoll ist.

Eine Veröffentlichung von Sterbetafeln für die einzelnen Planungsregionen ist abzulehnen, da zwischen den einzelnen Gebieten keine statistisch nachweisbaren, signifikanten Unterschiede bestehen.

Mit den angegebenen Methoden und Mitteln der statistischen Testtheorie ist eine Quantifizierung des Fehlers möglich, der begangen wird, wenn man für weiterführende Untersuchungen für Planungsregionen, wie z.B. Bevölkerungsprognosen, die Sterbetafel Thüringens zur Anwendung bringt.

Weitere Möglichkeiten für die Untersuchung der Aussagekraft von Sterbetafeln für die Territorialgliederungen

Wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten festgestellt, ist eine Erstellung und Veröffentlichung von Verkürzten Sterbetafeln für die kreisfreien Städte und Landkreise sowie für die Planungsregionen statistisch-methodisch nicht sinnvoll. Sollte jedoch Interesse an einer kleinräumigen, statistisch noch gesicherten Aussage bestehen, ist es natürlich notwendig, die „Stichprobengröße“ (Bevölkerung) zu erhöhen. Dies kann aufgrund der territorialen Festlegung, was unmittelbar mit einer relativ konstanten Bevölkerung verbunden ist, nur auf dem Wege einer Erhöhung der Anzahl der beobachteten Jahre geschehen.

Wie aber der Tabelle 4 zu entnehmen ist, unterliegen die Sterblichkeitsverhältnisse in Thüringen zur Zeit einer starken (positiven) Entwicklung. So stieg für die männliche Bevölkerung die durchschnittliche Lebenserwartung von 1990 bis zum Jahr 1993 um 1,6 Jahre. Ein im Jahr 1993 geborenes Mädchen wird statistisch gesehen ebenfalls 1,6 Jahre älter als jenes, das 1990 geboren wurde. Ein Ende dieser tendenziellen Entwicklung zeichnet sich gegenwärtig nicht ab.

Tabelle 4: Durchschnittliche Lebenserwartungen der Jahre 1990 bis 1993 in Thüringen

Durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen, berechnet aus den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten für die einzelnen Jahre 1990 bis 1993.

Geschlecht	1990	1991	1992	1993	1990/93
Männer	69,21	69,82	70,35	70,82	69,99
Frauen	75,85	76,68	77,29	77,42	76,75

Die Zusammenfassung von fünf oder mehr Jahren vergrößert die Verzerrung der untersuchten Sterblichkeitsverhältnisse. Natürlich wirft dies die Frage auf, wieviele Jahre zusammengefaßt werden können, ohne daß die aktuellen Sterbewahrscheinlichkeiten überstark verändert werden. Ist die Zusammenfassung von drei oder vier Jahren zuverlässiger als die Summierung von fünf oder sechs Jahren?

Dieses Problem begründet die Notwendigkeit, in der Zukunft, wenn weitere Sterbedaten für Thüringen vorliegen, neue und andere Methoden zu entwickeln, anzuwenden und auf ihre Aussagekraft zu überprüfen.

So könnte zum Beispiel eine vergleichende Betrachtung der Sterbedaten für die Kommulation verschiedener Jahre (z.B. 1990 bis 1992, 1993 bis 1995 usw.) für die einzelnen Kreise und Planungsregionen durchgeführt werden, um dann zu untersuchen, ob Gesetzmäßigkeiten einer territorialen Differenzierung der Sterblichkeitsverhältnisse innerhalb Thüringens existieren.

Eine weitere Möglichkeit kann eine Untersuchung der Sterblichkeitsverhältnisse über mehrere Jahre hinweg bieten. Dabei ist es dann notwendig, mathematische Methoden zu entwickeln, mit denen der beobachtete Trend „herausberechnet“ werden kann.